Matrices

1. Définitions :

Une matrice A est un tableau rectangulaire comprenant n lignes et m colonnes remplies de nombres réels. L'élément situé ligne i colonne j se note a_{ij}. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .... & a_{2m} \\ ... & .... & ..... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & .... & a_{nm} \end{pmatrix}$.

On peut noter plus simplement : $A = (a_{ij})$,$1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}\,; 1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{m}$.

Si m = n, A est une <u>matrice carrée d'ordre n</u>.
Si m = 1, A est une matrice <u>unicolonne.</u> Si n = 1, elle est <u>uniligne.</u>

On appelle <u>**transposée**</u> de A et on note ${}^tA$ la matrice obtenue en inversant les lignes et les colonnes de A.
(l'élément situé ligne i colonne j est alors a_{ji})

Les éléments a_{ii} d'une matrice carrée sont appelés <u>éléments diagonaux</u> et forment la <u>diagonale principale</u> de A.

Une matrice A est <u>symétrique</u> si elle est égale à sa transposée (donc si $a_{ij} = a_{ji}$).
(rem : cela l'oblige à être carrée).

La matrice <u>nulle</u> notée 0 n'est constituée que de zéros.

Une matrice est <u>diagonale</u> si tous ses éléments sont nuls en dehors (peut-être) de ses éléments diagonaux.

2. Opérations sur les matrices :

a) On peut définir naturellement et de façon claire une <u>addition</u> et une <u>soustraction</u> des matrices de même forme. (c.a.d : ayant même nombre de lignes et même nombre de colonnes.)
On peut ainsi définir <u>l'opposée</u> de la matrice A. (par définition, A + (-A) = 0)
On peut aussi définir aisément le produit d'une matrice A par un réel k. Qu'est-ce que 5A ?

b) <u>Multiplication :</u>

Soient A ayant n lignes et p colonnes, B ayant p lignes et m colonnes. Ecrivons A sous la forme : (a_{ij}) , et B sous la forme : (b_{kl}). On définit la matrice AB (dans cet ordre) comme ayant n lignes et m colonnes, l'élément de cette matrice situé ligne i colonne j s'obtenant en faisant le produit scalaire de la ligne i de A par la colonne j de B, c.a.d : $\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}b_{kj}$.

La matrice carrée I dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres sont nuls joue le rôle d'élément neutre pour la multiplication des matrices (comme la matrice nulle pour l'addition). C'est la <u>matrice unité.</u>

Une matrice carrée A telle qu'il existe une matrice carrée B (du même ordre) vérifiant : AB = BA = I est dite <u>inversible.</u> Son inverse est B et se note : A^{-1}.

3. Déterminant :

Soit A = (a) une matrice d'ordre 1 (uniligne, unicolonne) . Le déterminant de A, noté detA, est égal à : a

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 2.

Le déterminant de A, noté **detA** ou : $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ est le nombre : **ad – bc**.

Si n=3, $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - bdi - afh$.

Pour n plus grand, il vaut mieux procéder ainsi :
On appelle **mineur** de l'élément a_{ij} du déterminant D le déterminant D_{ij} obtenu en barrant dans D la ligne et la colonne de a_{ij}. On appelle **cofacteur** de a_{ij} l'expression $(-1)^{i+j} D_{ij}$. La règle qui permet de trouver le signe correspondant à $(-1)^{i+j}$ est représentée par le tableau suivant : $\begin{vmatrix} + & - & + & - & .... \\ - & + & - & + & .... \\ + & - & + & - & .... \\ - & + & - & & etc \end{vmatrix}$

Théorème :
Un déterminant d'ordre n est égal à la somme des produits de chacun des éléments d'une même rangée (ligne ou colonne) par son cofacteur.
Soit : $D = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+j} D_{ij}$.(développement par rapport aux éléments de la $j^{ème}$ colonne. On peut aussi développer par rapport à la $i^{ème}$ ligne)

ex : Si on développe le déterminant d'ordre 3 écrit 8 lignes plus haut par rapport à sa première colonne, on obtient : $a\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}$, c.a.d : $a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge)$.

Déterminants et produits de matrices :

théorème fondamental :
Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. det(AB) = (detA)(detB).

Théorème fondamental : **A est inversible si et seulement si** $\det A \neq 0$**.**

Calcul de l'inverse de A :
Soit A une matrice carrée inversible. On appelle **comatrice** de A la matrice notée com(A) dont les coefficients sont les cofacteurs de A : $com(A) = ((-1)^{i+j} D_{ij})$.

On a alors la formule suivante qui permet de calculer l'inverse de A : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} . {}^t com(A)$.